TITLE:

接続と正則曲線の第二主要定理について (葉層の微分幾何とベルグマン核)

AUTHOR(S):

野口, 潤次郎

CITATION:

野口, 潤次郎. 接続と正則曲線の第二主要定理について (葉層の微分幾何とベルグマン核). 数理解析研究所講究録 2009, 1661: 77-86

ISSUE DATE:

2009-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/140965

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1661 巻 2009 年 77-86

接続と正則曲線の第二主要定理について*

野口潤次郎

1 序

この講演の目的は、Y.-T. Siu による二つの論文 [17] と [18] をよく理解したいということと、古典的な H. Cartan [2] の複素射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への正則曲線の超平面との交叉についての第二主要定理の幾何学的証明を与えようとすることである。最終的な目標は、次の予想にある。

Green-Griffiths 予想。 ([5]) X を対数的一般型代数多様体とすると、任意の正則曲線 $f:\mathbf{C}\to X$ は代数退化する。

この予想へのネヴァンリンナ理論的アプローチとして、

正則曲線の基本予想。 コンパクト代数的多様体 M への代数的非退化な正則写像 $f:\mathbf{C}\to M$ と被約因子 $D=\sum D_i\subset M$ (正規交叉) に対し、

$$T_f(r,L(D))+T_f(r,K_M)\leqq\sum_i N_1(r,f^*D_i)+o(T_f(r))||.$$

個数関数を $N_1(r,\bullet)$ としたところは、強い主張であるが (理由については、[15], [20], [16] を参照)、打ち切りをしない個数関数 $N(r,\bullet)$ でも、基本予想は Green-Griffiths 予想を含む。この辺の問題意識は、既に Griffiths [6] に見られる。S. Lang [8] にも関連する興味深い議論がある。

H. Cartan の第二主要定理に現れる "$n+1$" という数は、これまでの証明では結果的に $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の標準束 $K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}$ の次数に一致するものであって、その証明中に $K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}$ が現れるというものではなっかた。Y.-T. Siu の論文でも、ある特別な接続を用いて Weyls-Ahlfors 理論 ([19]) の類似をしようとしている。Siu 氏への電子便での問い合わせでは、彼としては Weyls-Ahlfors 理論の方法を捕ろうとしたが、やはり一般的に取り扱おうとすればするほで条件がきつくなり、複雑になるとのことであった。Weyls-Ahlfors 理論の方法を一般化する試みは、Chern-Cowen-Vitter [3] もやっているが、曲率の条件が出てきて、旨くゆくのは結局 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の場合に限るといったことになっている。その場合の扱いでも、標準束 $K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}$ が明示的に現れるわけではない。Siu の上記二つの論文では、要点は有理型接続を使う点なのだが、Cartan の第二主要定理を導出する部分では有理型接続を使っているという訳ではない。有理型接続だけを使って Cartan の第二主要定理を証明できるのかどうかははっきりしない。しかし、主定理の記述中に K_M が現れる点では、幾何学的ではあ

*科学研究費基盤 (S) 17104001 の研究助成に感謝する。

る。その証明中に、定理の設定には現れない直線束 F_i で $H^1(M, \Omega_M^1 \otimes F_i) = \{0\}$ なるものが使われ、最終的評価を得るのにかなり複雑な手続きを踏む ([17] §8 を参照されたい)。この部分の議論は、本稿の方法では、全く必要なくなる。

本稿では、Weyls-Ahlfors 理論の方法でなく、同次元(微分非退化)有理型写像 $f : \mathbf{C}^n \to M$ ($n = \dim M$) に対する第二主要定理の導出で大変成功した Griffiths 等 [1], [7] による方法を手本にする。まず一般的な設定の基で第二主要定理を述べる (§2)。その特別な場合として Cartan の第二主要定理を導出する (§3)。以上の方法で、[17]([18]) の主結果は、導出できることが分かった。

注意。 本研究は、J. Winkelmann 氏 (Bayreuth) との共同研究の途上報告である。いずれ結果は、共著の論文として発表される予定である。

2 ある一般的第二主要定理

2.1 接続と対数微分の補題。

M を一般に n 次元複素多様体とする。∇ で正則接空間 $\mathbf{T}(M)$ の C^∞ 接続を表す。これはつまり、$\mathbf{T}(M)$ の二つの C^∞ 切断(ベクトル場)X, Y に対し、第三の C^∞ ベクトル場 $\nabla_X Y$ を対応させるもので、M 上の C^∞ 関数 α に対し、次をみたす対応である。

(i) $\nabla_X Y$ は、X と Y について $\mathbf{C}$ 上線形である。

(ii) $\nabla_{\alpha X} Y = \alpha \nabla_X Y$;

(iii) $\nabla_X(\alpha Y) = X(\alpha) \cdot Y + \alpha \nabla_X Y$.

N を M の局所部分多様体とする。N 上の $\mathbf{T}(N)$ の C^∞ 切断 X', Y' をとり、N の近傍上に $\mathbf{T}(M)$ の C^∞ 切断 X, Y として拡張しておく。すると、N への制限 $(\nabla_X Y)|_N$ が、拡張 X, Y の取り方によらず決まり、それを $\nabla_{X'} Y'$ と書く。しかし、$\nabla_{X'} Y'$ は、$\mathbf{T}(M)|_N$ の N 上の切断であって、$\mathbf{T}(N)$ に値を持つとは限らない。

定義 2.1. N が ∇ に関して全測地的であるとは、$\mathbf{T}(N)$ の任意の C^∞ 切断 X', Y' に対し、$\nabla_{X'} Y'$ が $\mathbf{T}(N)$ の切断になることとする。

一般に領域 $U \subset \mathbf{C}$ からの正則曲線 $f : U \to M$ に対し、(1 階微分) $f'(z) \in \mathbf{T}(M)_{f(z)}$ を得る。帰納的に、f の k 階微分を

$$f^{(1)}(z) = f'(z), \quad f^{(k)}(z) = \nabla_{f'(z)} f^{(k-1)}(z), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

と定義する。f の ∇ に関するロンスキアンを

$$W(\nabla, f) = f^{(1)}(z) \wedge \cdots \wedge f^{(n)}(z) \in K_M^*,$$

と定義する。ここで、K_M^* は標準束 K_M の双対を表す。局所的な性質として、$W(\nabla, f)$ が正則であること、及び $\log |W(\nabla, f)|$ が劣調和であることが定義できる。

定義 2.2. f が ∇ に関して(非)退化であるとは、$W(\nabla, f) \equiv 0$ ($\not\equiv 0$) となること。

正則曲線 $f : \mathbf{C} \to M$ をとり、∇ に関するロンスキアン $W(\nabla, f)(z)$ を考える。それは、$K^*_{M,f(z)}$ 値であるので、M 上の C^∞ 体積要素 Ω との対をとることができる。それを $|W(\nabla, f)(z)|^2 \cdot \Omega(f(z))$ と表すと、z の C^∞ 関数を得る。

$D = \sum_i D_i$ を M 上の被約因子で、D_i はその既約成分とする。D_i が決める直線束 $L(D_i)$ の正則切断 σ_i をその因子 (σ_i) が D_i となるものをとる。$L(D_i)$ にエルミート計量を導入し、それに関するノルムを $\|\cdot\|$ と書く。以上の準備の下、次の関数を定める。

$$\xi(z) = \frac{|W(\nabla, f)(z)|^2 \cdot \Omega(f(z))}{\prod_i \|\sigma_i(f(z))\|^2}. \tag{2.3}$$

次の補題が、一変数ネヴァンリンア理論の場合の対数微分補題にあたり、本稿で最も重要な役を果たす。高次元の場合の他のバージョンについては、[9], [14] などを参照されたい。

補題 2.4. （対数微分の補題）M をコンパクト代数多様体とし、因子 $D = \sum_i D_i$ について次を仮定する。

(i) D は単純正規交叉のみを持つ。

(ii) 任意の D_i は ∇ に関して全測地的である。

このとき、次の評価が成立する。

$$\int_{|z|=r} \log^+ \xi(z) \frac{d\theta}{2\pi} = S_f(r) = O(\log^+ r + \log^+ T_f(r))||. \tag{2.5}$$

証明。 $M = \cup_\alpha U_\alpha$ をアファイン被覆とし、U_α 上正則な有理関数 $x^i_\alpha, 1 \leq i \leq n = \dim M$ を

(i) $x^i_\alpha, 1 \leq i \leq n$ は、U_α の各点で局所正則座標系を与える、

(ii) $U_\alpha \cap D = \{x^1_\alpha \cdots x^{k_\alpha}_\alpha = 0\}$.

相対コンパクトな開集合 $V_\alpha \Subset U_\alpha$ を $M = \cup V_\alpha$ が成立するようにとっておく。$\mathbf{1}_{V_\alpha}$ で集合関数を表す。$f^j_\alpha(z) = x^j_\alpha(f(z)), 1 \leq j \leq n$ とおく。$\Gamma^k_{\alpha ij}$ を ∇ の局所座標 (x^i_α) に関するクリストッフェル記号とする。

D_i が ∇ に関して全測地的であるとは、U_α 上の C^∞ 関数 A_α、B_α が存在して、次のように表されることと同値である。

$$\Gamma^h_{\alpha ij}(x^1_\alpha, \ldots, x^h_\alpha, \ldots, x^n_\alpha) = A^h_{\alpha ij} \cdot x^h_\alpha + B^h_{\alpha ij} \cdot \bar{x}^h_\alpha, \quad 1 \leq h \leq k_\alpha. \tag{2.6}$$

従って、ある定数 $C_\alpha > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z))}{f^h_\alpha(z)} \Gamma^h_{\alpha ij}(f(z)) \right| &= \mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z)) \left| A^h_{\alpha ij}(f(z)) + B^h_{\alpha ij}(f(z)) \frac{\bar{f}^h_\alpha(z)}{f^h_\alpha(z)} \right| \\ &\leq \mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z)) \left(|A^h_{\alpha ij}(f(z))| + |B^h_{\alpha ij}(f(z))| \right) \\ &\leq C_\alpha, \qquad 1 \leq h \leq k_\alpha. \end{aligned} \tag{2.7}$$

この関数を $f(z)\not\in U_\alpha$ の場合は、0として $\mathbf{C}$ 上に拡張しておく。和に関するアインシュタインの約束の下で、

$$f^{(l)}(z)=f_\alpha^{(l)k}(z)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\right)_{f(z)}$$

とおく。すると U_α 上の C^∞ 関数 a_α が在って、次の式を得る。

$$\xi(z)=\left|\det\begin{pmatrix} f_\alpha^{(1)1} & \cdots & f_\alpha^{(1)k_\alpha} & \cdots & f_\alpha^{(1)n}\\ f_\alpha^{(2)1} & \cdots & f_\alpha^{(2)k_\alpha} & \cdots & f_\alpha^{(2)n}\\ f_\alpha^{(3)1} & \cdots & f_\alpha^{(3)k_\alpha} & \cdots & f_\alpha^{(3)n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_\alpha^{(n)1} & \cdots & f_\alpha^{(n)k_\alpha} & \cdots & f_\alpha^{(n)n}\end{pmatrix}\right|^2 \frac{a_\alpha(f(z))}{|f_\alpha^1|^2\cdots|f_\alpha^{k_\alpha}|^2} \tag{2.8}$$

$$=\left\|\begin{matrix} \frac{f_\alpha^{(1)1}}{f_\alpha^1} & \cdots & \frac{f_\alpha^{(1)k_\alpha}}{f_\alpha^{k_\alpha}} & f_\alpha^{(1)k_\alpha+1} & \cdots & f_\alpha^{(1)n}\\ \frac{f_\alpha^{(2)1}}{f_\alpha^1} & \cdots & \frac{f_\alpha^{(2)k_\alpha}}{f_\alpha^{k_\alpha}} & f_\alpha^{(2)k_\alpha+1} & \cdots & f_\alpha^{(2)n}\\ \frac{f_\alpha^{(3)1}}{f_\alpha^1} & \cdots & \frac{f_\alpha^{(3)k_\alpha}}{f_\alpha^{k_\alpha}} & f_\alpha^{(3)k_\alpha+1} & \cdots & f_\alpha^{(3)n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{f_\alpha^{(n)1}}{f_\alpha^1} & \cdots & \frac{f_\alpha^{(n)k_\alpha}}{f_\alpha^{k_\alpha}} & f_\alpha^{(n)k_\alpha+1} & \cdots & f_\alpha^{(n)n}\end{matrix}\right\|^2 a_\alpha(f(z)).$$

$V_\alpha\Subset U_\alpha$ なので、$\mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z))\cdot f_\alpha^i(z), 1\le i\le n$, や $\mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z))\cdot a_\alpha(f(z))$ は、有界関数である。従って (2.8) より、

$$\log^+\xi(z)=O\left(\sum_\alpha\left(\sum_{1\le k\le k_\alpha,1\le l\le n}\mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z))\cdot\log^+\left|\frac{f_\alpha^{(l)k}(z)}{f_\alpha^k(z)}\right|\right.\right. \tag{2.9}$$
$$\left.\left.+\sum_{1\le k,l\le n}\mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z))\cdot\log^+|f_\alpha^{(l)k}(z)|\right)\right)+O(1).$$

次に、各 $f_\alpha^{(l)k}$ を計算する。

$$\log^+|f_\alpha^{(1)k}|=\log^+|f_\alpha^{k\prime}|=\log^+|f_\alpha^{k(1)}|.$$

$1\le k\le k_\alpha$ に対しては、

$$\log^+\left|\frac{f_\alpha^{(1)k}}{f_\alpha^k}\right|=\log^+\left|\frac{f_\alpha^{k\prime}}{f_\alpha^k}\right|.$$

$l=2$ に対しては、

$$f_\alpha^{(2)k}=f_\alpha^{k\prime\prime}+\Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k\circ f\cdot f_\alpha^{i_1\prime}f_\alpha^{i_2\prime}.$$

関数 $\mathbf{1}_{V_\alpha}\circ f\cdot\Gamma_{\alpha i_1 i_2}\circ f$ は有界であるから、

$$\mathbf{1}_{V_\alpha}\circ f\cdot|f_\alpha^{(2)k}|=\mathbf{1}_{V_\alpha}\circ f\cdot O\left(|f_\alpha^{k\prime\prime}|+\left(\sum_{i=1}^n|f_\alpha^{i\prime}|\right)^2\right),$$

$$\mathbf{1}_{V_\alpha}\circ f\cdot\log^+|f_\alpha^{(2)k}|=\mathbf{1}_{V_\alpha}\circ f\cdot O\left(\log^+|f_\alpha^{k(2)}|+\sum_{i=1}^n\log^+|f_\alpha^{i(1)}|\right)+O(1).$$

$1 \le k \le k_\alpha$ にたいしては (2.7) により、

$$\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left| \frac{f_\alpha^{(2)k}}{f_\alpha^k} \right| = \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot O\left(\left| \frac{f_\alpha^{k\prime\prime}}{f_\alpha^k} \right| + \left(\sum_{i=1}^n |f_\alpha^{i\prime}| \right)^2 \right),$$

$$\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ |f_\alpha^{(2)k}| = \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot O\left(\log^+ |f_\alpha^{k(2)}| + \sum_{i=1}^n \log^+ |f_\alpha^{i(1)}| \right) + O(1).$$

ここまでは、易しいが、$l = 3$ で初めて $f_\alpha^{(3)k}$ の中に $\Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k$ の偏微分が入ってくる:

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(3)k} = {} & f_\alpha^{k\prime\prime\prime} + \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime\prime} f_\alpha^{i_2\prime} + \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{i_2\prime\prime} \\ & + \frac{\partial \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k}{\partial x_\alpha^{i_3}} \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{i_2\prime} f_\alpha^{i_3\prime} + \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{(2)i_2}, \end{aligned}$$

さらに、

$$\Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{(2)i_2} = \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{i_2\prime\prime} + \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} \cdot \Gamma_{\alpha i_3 i_4}^{i_2} \circ f \cdot f_\alpha^{i_3\prime} f_\alpha^{i_4\prime}.$$

従って、次を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ |f_\alpha^{(3)k}| = \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot O\Bigg(& \log^+ |f_\alpha^{k(3)}| + \sum_{i=1}^n \log^+ |f_\alpha^{i(2)}| \\ & + \sum_{i=1}^n \log^+ |f_\alpha^{i(1)}| \Bigg) + O(1). \end{aligned}$$

$1 \le k \le k_\alpha$ に対する $\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left| \frac{f_\alpha^{(3)k}}{f_\alpha^k} \right|$ を計算すると:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left| \frac{f_\alpha^{(3)k}}{f_\alpha^k} \right| \\ & \le \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \Bigg(\left| \frac{f_\alpha^{k\prime\prime\prime}}{f_\alpha^k} \right| + \left| \frac{\Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f}{f_\alpha^k} f_\alpha^{i_1\prime\prime} f_\alpha^{i_2\prime} \right| + \left| \frac{\Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f}{f_\alpha^k} f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{i_2\prime\prime} \right| \\ & \quad + \left| \frac{1}{f_\alpha^k} \frac{\partial \Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k}{\partial x_\alpha^{i_3}} \circ f \cdot f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{i_2\prime} f_\alpha^{i_3\prime} \right| + \left| \frac{\Gamma_{\alpha i_1 i_2}^k \circ f}{f_\alpha^k} f_\alpha^{i_1\prime} f_\alpha^{(2)i_2} \right| \Bigg). \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで再び、$\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left|\frac{\Gamma^k_{\alpha i_1 i_2} \circ f}{f^k_\alpha}\right|$ は有界であることに注意する。(2.10) の右辺第４項を計算しよう: $i_3 \neq k$ の場合、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left|\frac{1}{f^k_\alpha} \frac{\partial \Gamma^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}_\alpha} \circ f \cdot f^{i_1\prime}_\alpha f^{i_2\prime}_\alpha f^{i_3\prime}_\alpha\right| \\
&= \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left|\left(\frac{\partial A^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}_\alpha} \circ f + \frac{\partial B^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}_\alpha} \circ f \cdot \frac{\bar{f}^k_\alpha}{f^k_\alpha}\right) f^{i_1\prime}_\alpha f^{i_2\prime}_\alpha f^{i_3\prime}_\alpha\right| \\
&\leq \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left(\left|\frac{\partial A^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}_\alpha} \circ f\right| + \left|\frac{\partial B^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^{i_3}_\alpha} \circ f\right|\right) |f^{i_1\prime}_\alpha f^{i_2\prime}_\alpha f^{i_3\prime}_\alpha| \\
&= \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot O\left(\sum_{i=1}^n |f^{i\prime}_\alpha|\right)^3.
\end{aligned}$$

$i_3 = k$ の場合は、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left|\frac{1}{f^k_\alpha} \frac{\partial \Gamma^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^k_\alpha} \circ f \cdot f^{i_1\prime}_\alpha f^{i_2\prime}_\alpha f^{k\prime}_\alpha\right| \\
&= \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \left|\frac{\partial \Gamma^k_{\alpha i_1 i_2}}{\partial x^k_\alpha} \circ f \cdot f^{i_1\prime}_\alpha f^{i_2\prime}_\alpha \frac{f^{k\prime}_\alpha}{f^k_\alpha}\right| \\
&= \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot O\left(\left(\sum_{i=1}^n |f^{i\prime}_\alpha|\right)^2 \left|\frac{f^{k\prime}_\alpha}{f^k_\alpha}\right|\right).
\end{aligned}$$

よって、次が出る。

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ \left|\frac{f^{(3)k}_\alpha}{f^k_\alpha}\right| \leq \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot O\Bigg(\log^+ \left|\frac{f^{k(3)}_\alpha}{f^k_\alpha}\right| + \sum_{i=1}^n \log^+ |f^{i(2)}_\alpha| \\
+ \sum_{i=1}^n \log^+ |f^{i(1)}_\alpha|\Bigg) + O(1).
\end{aligned}$$

このようにして、

$$\begin{aligned}
(2.11)\quad &\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ |f^{(l)k}_\alpha| = O\left(\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l} \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ |f^{i(j)}_\alpha|\right) + O(1), \quad 1 \leq k \leq n, \\
&\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ \left|\frac{f^{(l)k}_\alpha}{f^k_\alpha}\right| = O\Bigg(\sum_{1 \leq j \leq l} \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ \left|\frac{f^{k(j)}_\alpha}{f^k_\alpha}\right| \\
&\qquad + \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l} \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ |f^{i(j)}_\alpha|\Bigg) + O(1), \quad 1 \leq k \leq k_\alpha.
\end{aligned}$$

各 $j \geq 1$ に対して、次を注意する。

$$\mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ |f_\alpha^{i(j)}| \leq \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ \left| \frac{f_\alpha^{i(j)}}{f_\alpha^i} \cdot f_\alpha^i \right| = \mathbf{1}_{V_\alpha} \circ f \cdot \log^+ \left| \frac{f_\alpha^{i(j)}}{f_\alpha^i} \right| + O(1). \tag{2.12}$$

以上の (2.9)、(2.11)、(2.12) とネヴァンリンナの対数微分の補題（高次元版は、[14] を参照）より、

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=r} \log^+ \xi(z) \frac{d\theta}{2\pi} &= O\left(\sum_{\alpha, 1 \leq k, l \leq n} \int_{|z|=r} \mathbf{1}_{V_\alpha}(f(z)) \cdot \log^+ \left| \frac{f_\alpha^{k(l)}(z)}{f_\alpha^k(z)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \right) + O(1) \\
&= O\left(\sum_{\alpha, 1 \leq k, l \leq n} \int_{|z|=r} \log^+ \left| \frac{f_\alpha^{k(l)}(z)}{f_\alpha^k(z)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \right) + O(1) \\
&= S_f(r).
\end{aligned}$$

証了。

2.2 ある一般的第二主要定理。

さて、前小節で証明した補題 2.4 を用いて次の第二主要定理を証明しよう。M を n 次元コンパクト複素代数多様体とする。

定理 2.13. $f : \mathbf{C} \to M$ を ∇ に関して非退化な正則曲線とし、$D = \sum_i D_i$ を M 上の単純正規交叉のみを持つ被約因子とする。次の仮定をおく。

(i) $\log |W(\nabla, f)|$ は、劣調和である。

(ii) 任意の D_i は、∇ に関して全測地的である。

このとき次が成立する。

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_M) \leq \sum_i N_n(r, f^* D_i) + S_f(r). \tag{2.14}$$

ここで $N_n(r, f^* D_i)$ は、レベル n の打ち切り個数関数を表し、$S_f(r)$ は補題 2.5 に現れたネヴァンリンア理論での剰余項を表す。

証明。　まず、次のカレントが $\mathbf{C}$ 上の正測度として定義される。

$$dd^c \log |W(\nabla, f)|^2 = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log |W(\nabla, f)|^2 \tag{2.15}$$

この意味で次のカレント方程式を得る。

$$dd^c \log \xi = f^* c_1(L(D)) + f^* c_1(K_M) - \sum_i f^* D_i + dd^c \log |W(\nabla, f)|^2. \tag{2.16}$$

$f(z) \in \sum D_i$ となる点での重複度を少々慎重に計算すると、

$$-\sum_i f^*D_i + dd^c \log |W(\nabla, f)|^2 \geq -\sum (f^*D_i)_n.$$

ここで、$(f^*D_i)_n$ は因子の位数を n で打ち切ったことを表す。これと (2.16) より、次が従う。

$$dd^c \log \xi \geq f^*c_1(L(D)) + f^*c_1(K_M) - \sum_i (f^*D_i)_n. \tag{2.17}$$

イェンゼンの公式を使って積分すると、

$$\begin{aligned} & T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_M) \\ & \leq \sum_i N_n(r, f^*D_i) + \frac{1}{2}\int_{|z|=r} \log \xi(z) \frac{d\theta}{2\pi} - \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \log \xi(z) \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

ここで補題 2.4 を使って、

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_M) \leq \sum_i N_n(r, f^*D_i) + S_f(r).$$

証了。

2.3 有理型接続の場合。

前小節の証明で見られた様に、要は局所的にロンスキアンが定義する測度 (2.15) が計算できれば、なにがしかの第二主要定理が従うのである。そのような場合の一つとして ∇ が有理型接続である場合が取り扱い可能となる。

定義 2.19. $\mathbf{T}(M)$ の接続 ∇ が有理型とは、M の各正則座標近傍上そのクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k が、有理型関数であることである。

この場合、Γ_{ij}^k に現れる極因子を $(\nabla)_\infty$ と書けば、$W(\nabla, f)$ の極因子は高々 $\frac{n(n-1)}{2}(\nabla)_\infty$ である。従って、この場合は $dd^c \log |W(\nabla, f)|$ は正測度ではないが、次をみたす。

$$dd^c \log |W(\nabla, f)| + \frac{n(n-1)}{2} f^*(\nabla)_\infty \geq 0. \tag{2.20}$$

これと、定理 2.13 の証明から、次の第二主要定理を得る。

定理 2.21. ∇ を $\mathbf{T}(M)$ 上の有理型接続とし、$f : \mathbf{C} \to M$ を正則曲線とする。$D = \sum_i D_i$ を M 上の単純正規交叉のみを持つ被約因子とする。次を仮定する。

(i) $f(\mathbf{C}) \not\subset \mathrm{Supp}\,(\nabla)_\infty$ で、f は ∇ に関して非退化である。

(ii) 任意の $D_i \not\subset (\nabla)_\infty$ とし、かつ ∇ に関して全測地的である。

このとき次が成立する。

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_M) + \frac{n(n-1)}{2} T_f(r, L((\nabla)_\infty)) \leq \sum_i N_n(r, f^*D_i) + S_f(r). \tag{2.22}$$

3 カルタンの第二主要定理の幾何学的導出

この節では、∇ で $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上のフビニ・シュツディ計量（形式）ω から誘導される接続を表す。先ずは、次の定理である。

定理 3.1. $f : U \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を $\mathbf{C}$ の領域 U からの任意の正則曲線とする。

(i) f が線形（非）退化であることと、∇ に関して（非）退化 (2.2 の意味) であることは同値である。

(ii) ∇ に関する f のロンスキアン $W(\nabla, f)(z)$ は、正則である。

注意。上記 (ii) が重要である。一見古くから分かっていたはずのような主張であるが、調べてもみつからず、筆者の知る限りで、$n = 2$ の場合に Siu [17] が述べているのが初出である。彼は慎重で、$n \geq 3$ の場合については何も言及していない。$n = 2$ の場合は、正規座標をとると接続の微分はまだ出てこず、接続の添え字についてのある対称性から容易に示される。しかし一般の $n \geq 2$ では、直接計算だけで示そうとすると、かなり複雑な計算になる。

紙数の都合もあり証明は、いずれ出す論文に託すが、要点は、ω のポテンシャル関数 $\log(1 + \|w\|^2)$ のテイラー展開の形にある。

$$\log\left(1 + \|w\|^2\right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} \|w\|^{2\mu}.$$

つまり、$\|w\|^2$ の展開で与えられることしか使わない。$\mathbf{C}^n$ の開球 $B(0,1)$ のベルグマン計量のポテンシャル関数も

$$-\log\left(1 - \|w\|^2\right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \|w\|^{2\mu},$$

と同じ形の展開をもつので、その誘導する接続 ∇_B についても同じことが言える。

系 3.2. 正則曲線 $g : U \to B(0,1)$ の ∇_B に関するロンスキアン $W(\nabla_B, g)(z)$ は、正則である。

上述の定理 3.1 と前節で得られた第二主要定理 2.13 より次のカルタンの第二主要定理が、直ちに従う。

定理 3.3. $D = \sum_{i=1}^{q} H_i$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の一般の位置にある超平面 H_i の和因子とする。線形非退化な正則曲線 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ に対し、

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}) \leq \sum_{i=1}^{q} N_n(r, f^* H_i) + S_f(r).$$

$T_f(r) = T_f(r, \omega)$ とおけば、

$$(q - n - 1) T_f(r) \leq \sum_{i=1}^{q} N_n(r, f^* H_i) + S_f(r),$$

ということになる。

References

[1] J. Carlson and P. Griffiths, A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties, Ann. Math. **95** (1972), 557-584.

[2] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5-31.

[3] S. S. Chern, M. Cowen, and A. L. Vitter, Frenet frames along holomorphic curves, Value Distribution Theory, Part A, pp. 191-203, Marcel Dekker, New York, 1974

[4] P. Fatou, Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C. R. Acad. Sci. Paris **175** (1922), 862–865.

[5] M. Green and P. Griffiths, Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings, The Chern Symposium 1979, pp. 41-74, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

[6] P. Griffiths, Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 374-382.

[7] P. Griffiths and J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, Acta Math. **130** (1973), 145-220.

[8] Lang, S., Hyperbolic and Diophantine analysis, Amer. Math. Soc. **14** (1986), 159-205.

[9] J. Noguchi, Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833-853.

[10] J. Noguchi, Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213-233.

[11] J. Noguchi, On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[12] J. Noguchi, Intersection multiplicities of holomorphic and algebraic curves with divisors, Proc. OKA 100 Conference Kyoto/Nara 2001, Advanced Studies in Pure Mathematics **42**, pp. 243-248, Japan Math. Soc. Tokyo, 2004.

[13] J. Noguchi, Value Distribution and Distribution of Rational Points at Mittag-Leffler, Talk at Mittag-Leffler Institute, 27 March 2008.

[14] J. Noguchi, and T., Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Japanese edition, Iwanami, Tokyo, 1984; English Translation, Transl. Math. Mono. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[15] J. Noguchi, J. Winkelmann, and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, Acta Math. **188** no.1 (2002), 129-161.

[16] J. Noguchi, J. Winkelmann, and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties II, Forum Math.**20** (2008), 469-503.

[17] Y.-T. Siu, Defect relations for holomorphic maps between spaces of different dimensions, Duke Math. J. **55** (1987), 213-251.

[18] Y.-T. Siu, Nonequidimensional value distributio theory and meromorphic connections, Duke Math. J. **61** (1990), 341–367.

[19] H. Wu, The Equidistribution Theory of Holomorphic Curves, Annals of Math. Studies 64, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[20] K. Yamanoi, Holomorphic curves in abelian varieties and intersection with higher codimensional subvarieties, Forum Math. **16** (2004), 749-788.

〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学大学院数理科学研究科
http://nogpc4.ms.u-tokyo.ac.jp/nog/
e-mail: noguchi@ms.u-tokyo.ac.jp